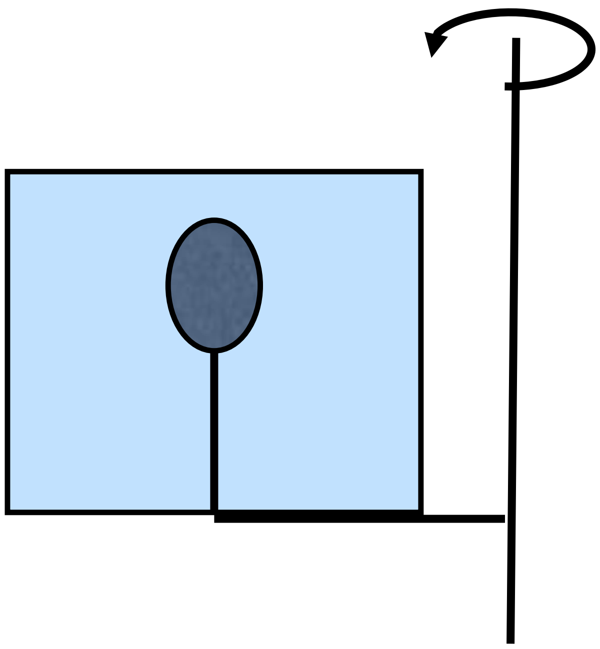
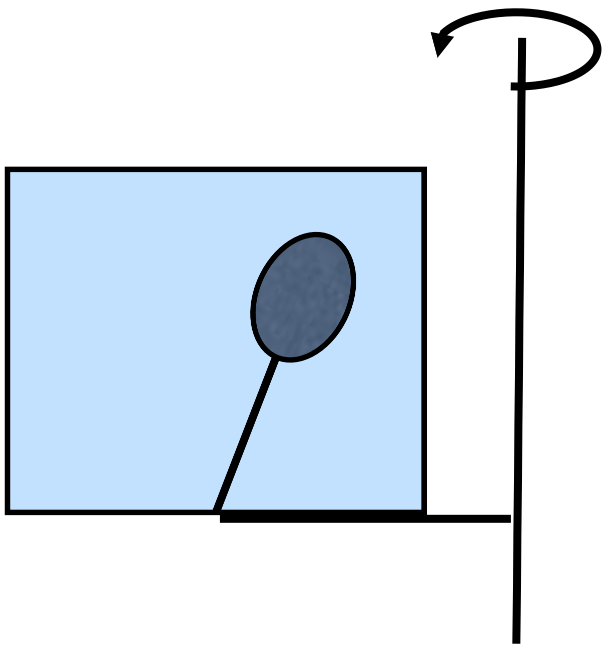
6.3 Ex.: ballon d'hélium

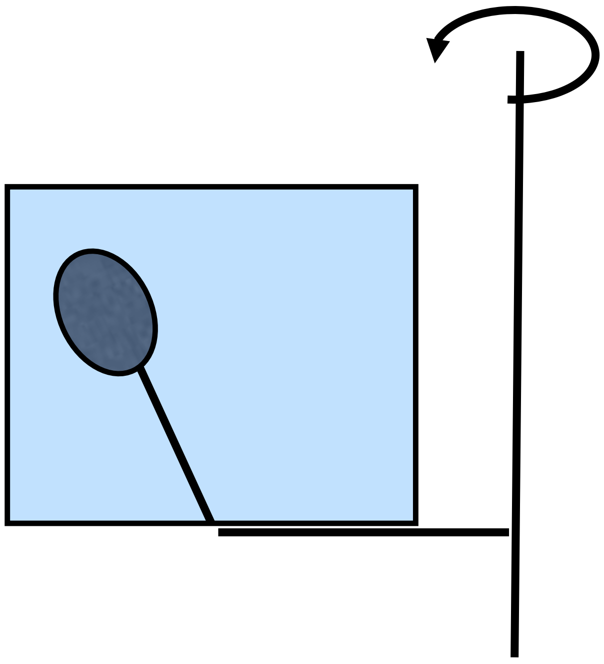
Un ballon d'hélium est accroché à un support et placé sous une cloche hermétique remplie d'air.
Le support est mis en rotation.
Que fait le ballon?



1)



2)



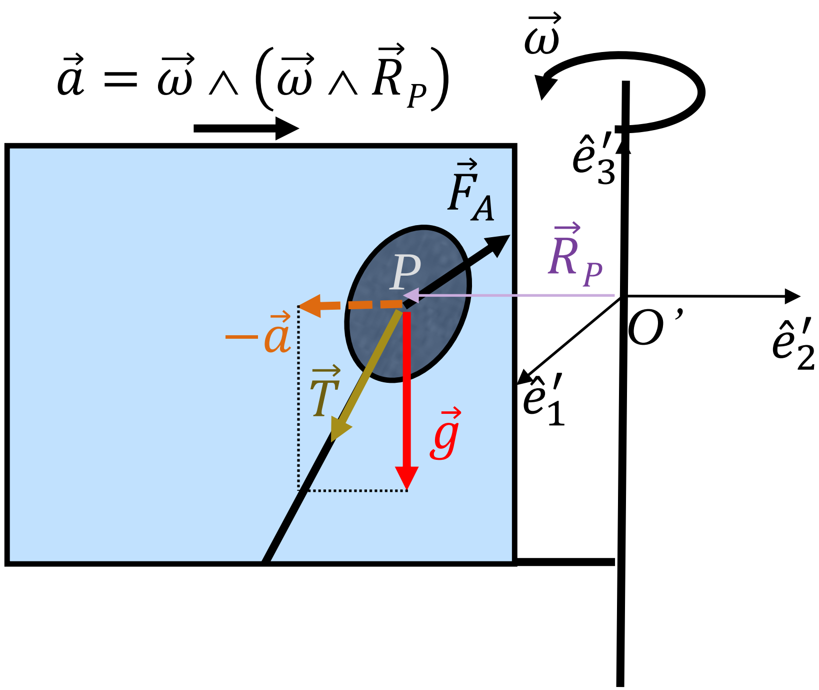
3)

6.3 Ex.: ballon d'hélium

Un ballon d'hélium est accroché à un support et placé sous une cloche hermétique remplie d'air.
Le support est soumis à une accélération centripète.
Que fait le ballon?

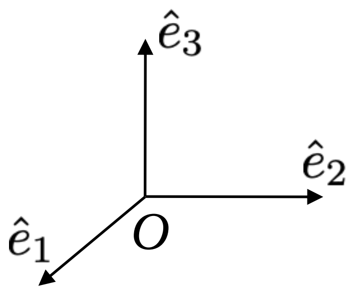
$$m\vec{a}'_P = \sum \vec{F}^{ext} - \left(2m\vec{\omega}\wedge\vec{v}'_P + m\vec{a}_{O'} + \underbrace{m\vec{\omega}\wedge\left(\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{O'P}\right)}_{= m\vec{a}} + m\dot{\vec{\omega}}\wedge\overrightarrow{O'P}\right)$$

$\vec{a} = \vec{\omega}\wedge\left(\vec{\omega}\wedge\vec{R}_P\right)$



Dans le référentiel O' en rotation centré sur l'axe de rotation:

- Le fluide déplacé est soumis à la force: $M\vec{g} - M\vec{a}$
- Donc, la force d'Archimède exercée par le fluide sur le ballon est: $\vec{F}_A = -M\vec{g} + M\vec{a}$
- Le ballon est à l'équilibre: $m\vec{g} + \vec{T} + \vec{F}_A - m\vec{a} = 0$



$$\vec{T} = -m\vec{g} + m\vec{a} - \vec{F}_A = m(-\vec{g} + \vec{a}) + M(\vec{g} - \vec{a}) = (M - m)(\vec{g} - \vec{a})$$

La Tension du fil est orientée selon $(\vec{g} - \vec{a})$

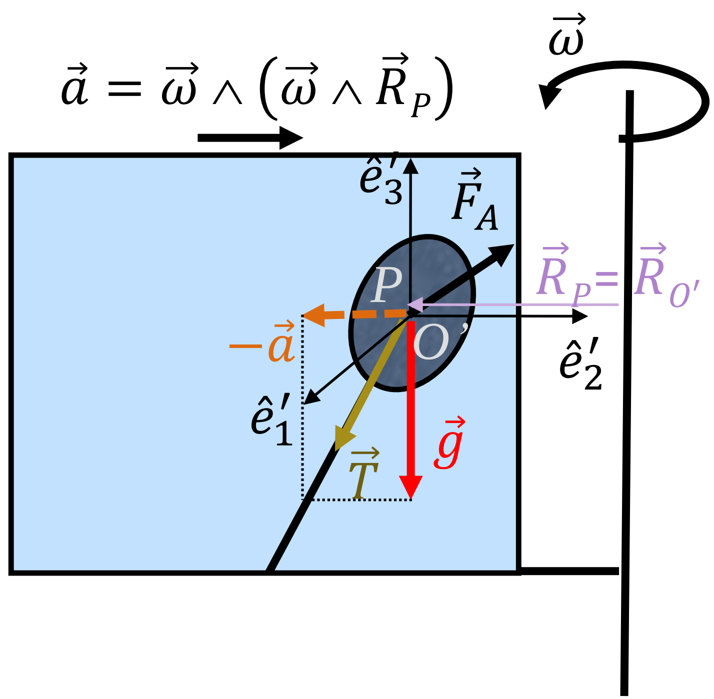
6.3 Ex.: ballon d'hélium

Un ballon d'hélium est accroché à un support et placé sous une cloche hermétique remplie d'air.
Le support est soumis à une accélération centripète.
Que fait le ballon?

$$m\vec{a}'_P = \sum\vec{F}^{ext} - \left(2m\vec{\omega}\wedge\vec{v}'_P + m\vec{a}_{O'} + m\vec{\omega}\wedge\left(\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{O'P}\right) + m\dot{\vec{\omega}}\wedge\overrightarrow{O'P}\right)$$

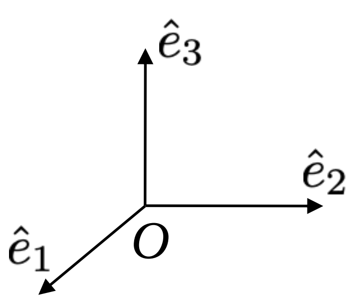
$$\shortparallel$$

$$m\vec{\omega}\wedge\left(\vec{\omega}\wedge\vec{R}_{O'}\right) = m\vec{a}$$



Dans le référentiel O' en rotation centré sur le ballon P:

- Le fluide déplacé est soumis à la force: $M\vec{g} - M\vec{a}$
- Donc, la force d'Archimède exercée par le fluide sur le ballon est: $\vec{F}_A = -M\vec{g} + M\vec{a}$
- Le ballon est à l'équilibre: $m\vec{g} + \vec{T} + \vec{F}_A - m\vec{a}_{O'} = 0$



$$\vec{T} = -m\vec{g} + m\vec{a}_{O'} - \vec{F}_A = m(-\vec{g} + \vec{a}) + M(\vec{g} - \vec{a}) = (M - m)(\vec{g} - \vec{a})$$

La Tension du fil est orientée selon $(\vec{g} - \vec{a})$

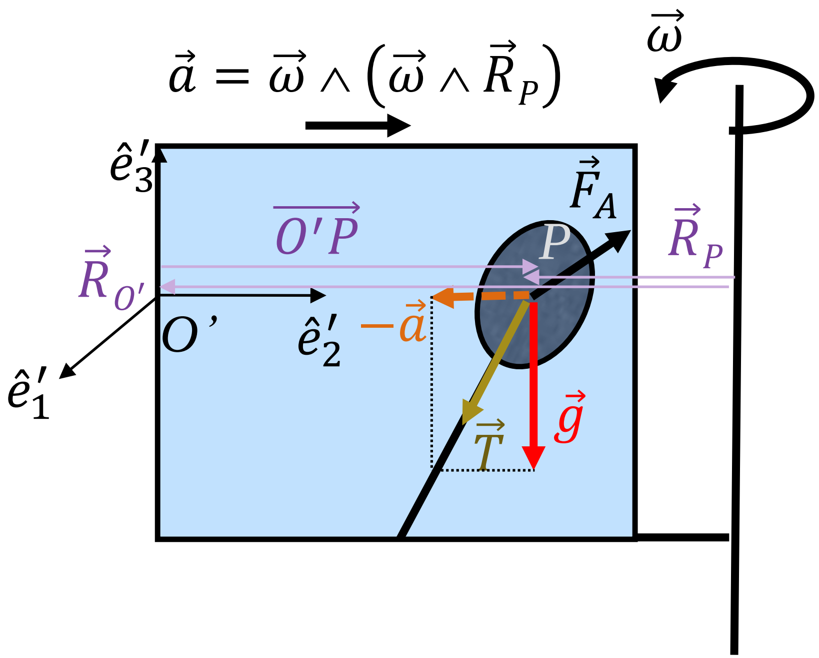
6.3 Ex.: ballon d'hélium

Un ballon d'hélium est accroché à un support et placé sous une cloche hermétique remplie d'air.
Le support est soumis à une accélération centripète.
Que fait le ballon?

$$m\vec{a}'_P = \sum \vec{F}^{ext} - \left(2m\vec{\omega}\wedge\vec{v}'_P + m\vec{a}_{O'} + m\vec{\omega}\wedge\left(\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{O'P}\right) + m\dot{\vec{\omega}}\wedge\overrightarrow{O'P}\right)$$

$$m\vec{a}_{O'} = m\vec{\omega}\wedge\left(\vec{\omega}\wedge\vec{R}_{O'}\right) \qquad m\vec{\omega}\wedge\left(\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{O'P}\right) = m\vec{a}_c$$

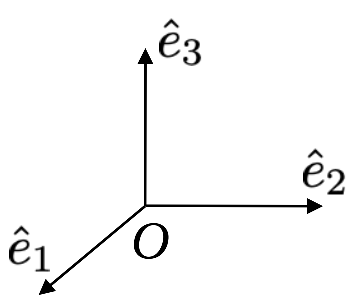
$$\vec{a} = \vec{\omega}\wedge\left(\vec{\omega}\wedge\vec{R}_P\right)$$



Dans le référentiel O' en rotation fixé au support:

- Le fluide déplacé est soumis à la force: $M\vec{g} - M\vec{a}$
- Donc, la force d'Archimède exercée par le fluide sur le ballon est: $\vec{F}_A = -M\vec{g} + M\vec{a}$
- Le ballon est à l'équilibre: $m\vec{g} + \vec{T} + \vec{F}_A - m\vec{a}_{O'} - m\vec{a}_c = 0$

$$m\vec{a}_{O'} + m\vec{a}_c = m\vec{\omega}\wedge\left(\vec{\omega}\wedge\vec{R}_{O'}\right) + m\vec{\omega}\wedge\left(\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{O'P}\right) =$$
$$m\vec{\omega}\wedge\left(\vec{\omega}\wedge(\vec{R}_{O'} + \overrightarrow{O'P})\right) = m\vec{\omega}\wedge\left(\vec{\omega}\wedge\vec{R}_P\right) = m\vec{a}$$



$$\vec{T} = -m\vec{g} + m\vec{a} - \vec{F}_A = m(-\vec{g} + \vec{a}) + M(\vec{g} - \vec{a}) = (M - m)(\vec{g} - \vec{a})$$

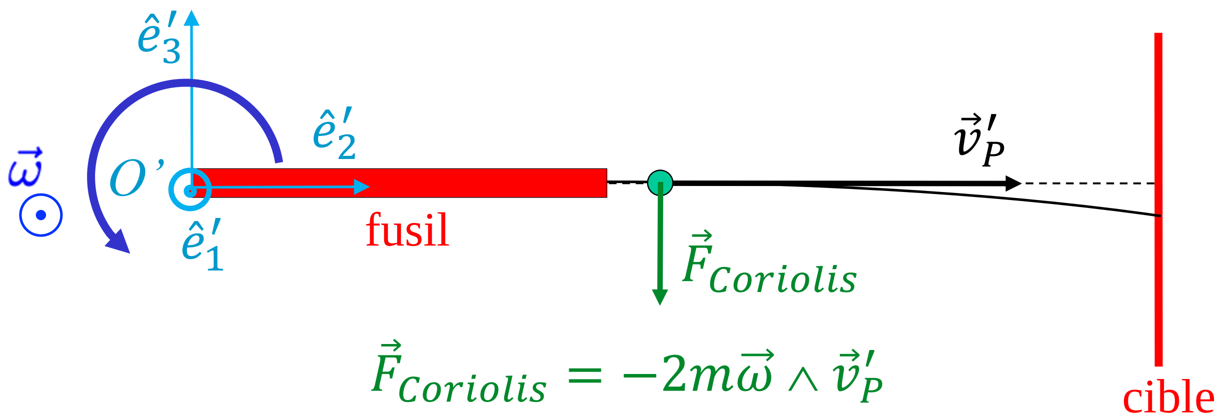
La Tension du fil est orientée selon $(\vec{g} - \vec{a})$

6.3 Ex.: Force de Coriolis

Gaspar Coriolis
(1792–1843)

$$m\vec{a}'_P = \sum \vec{F}^{ext} - \left(2m\vec{\omega} \wedge \vec{v}'_P + m\vec{a}_{O'} + m\vec{\omega} \wedge \left(\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'P}\right) + m\dot{\vec{\omega}} \wedge \overrightarrow{O'P}\right)$$

Fusil tournant vu de dessus
dans le référentiel du fusil :



$$\vec{F}_{Coriolis} = -2m\vec{\omega} \wedge \vec{v}'_P$$

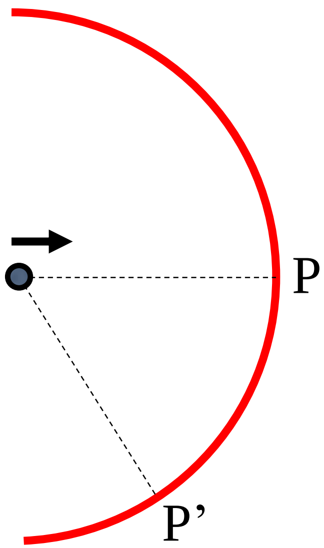
dévie la balle sur la droite

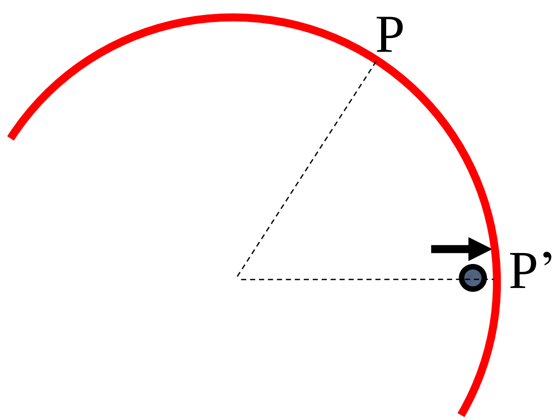
Dans le référentiel inertiel (à l'arrêt):
la balle suit un mouvement rectiligne uniforme, mais la cible est en train de tourner.
Le point d'impact se décale avec le temps

6.3 Ex.: Force de Coriolis

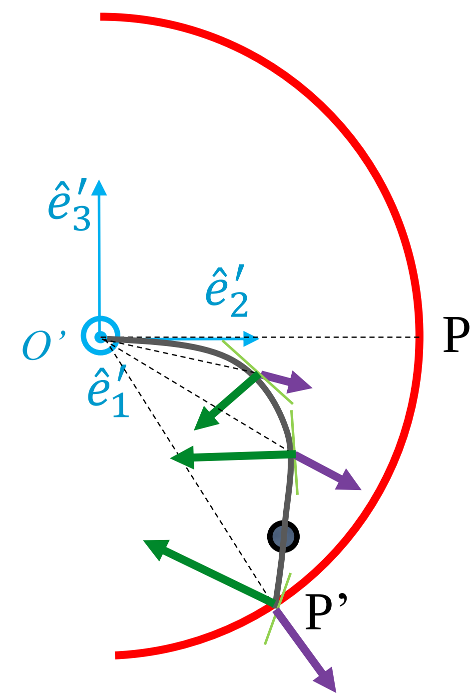
$$m\vec{a}'_P = \sum \vec{F}^{ext} - \left(2m\vec{\omega} \wedge \vec{v}'_P + m\vec{a}_{O'} + m\vec{\omega} \wedge \left(\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'P}\right) + m\dot{\vec{\omega}} \wedge \overrightarrow{O'P}\right)$$

Dans le référentiel inertiel (à l'arrêt): la balle suit un mouvement rectiligne uniforme, mais la cible est en train de tourner. Le point d'impact se décale avec le temps





Fusil tournant vu de dessus dans le référentiel du fusil :



6.4 Loi d'inertie et référentiels d'inertie

- Première loi de Newton (loi d'inertie) :

> Tout corps persévère dans l'état de repos ou de mouvement uniforme en ligne droite à moins qu'une force n'agisse sur lui et ne le contraigne à changer d'état

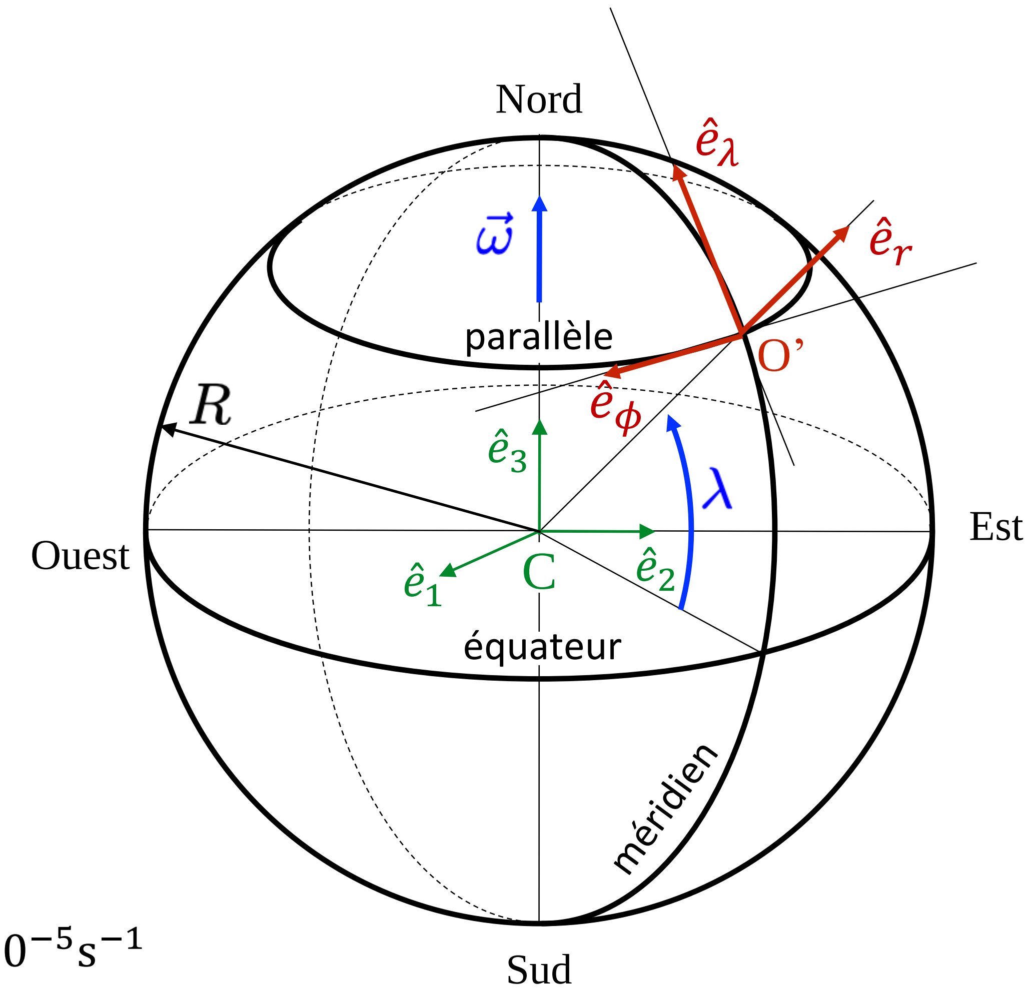
NB: cette loi n'est pas valable dans tous les référentiels !

- On appelle **référentiel d'inertie** (ou absolu) un référentiel dans lequel la loi d'inertie est valable
- Dans ce référentiel :
  - Il n'y a pas de « forces d'inertie »; la deuxième loi de Newton est valable
  - Un référentiel en mouvement rectiligne uniforme par rapport à un référentiel d'inertie est un référentiel d'inertie
  - Tous les référentiels d'inertie sont en mouvement rectiligne uniforme les uns par rapport aux autres

6.5 Référentiel terrestre

- On considère la Terre comme un « référentiel relatif » en mouvement de rotation uniforme ω par rapport à un « référentiel absolu » défini par le centre de la Terre et trois étoiles fixes (on néglige ici le mouvement de la Terre autour du Soleil, …)

- C = centre de la Terre
- O' = point sur la Terre à la latitude λ
- Repère $O'\hat{e}_r\hat{e}_\lambda\hat{e}_\phi$ lié à la Terre (référentiel terrestre)
  - $O'x$ pointe vers l'ouest,
  - $O'y$ pointe vers le nord,
  - $O'z$ pointe vers C
- Repère $C\hat{e}_1\hat{e}_2\hat{e}_3$ lié au référentiel absolu
  - $\hat{e}_3$ pointe vers le nord



- Valeurs numériques:
  - rayon $R = 6.37 \times 10^6$m
  - vitesse angulaire $\omega = 2\pi/\text{jour} = 7.27 \times 10^{-5}\text{s}^{-1}$

6.5 Dynamique terrestre: champ de pesanteur

- Dans le référentiel absolu (centre Terre + étoiles fixes): $\vec{g}(\vec{r}) = \frac{GM}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}$
- dans le référentiel terrestre (repère $O'\hat{e}_r\hat{e}_\lambda\hat{e}_\phi$):

  A $t = 0$ une masse m est lâchée au point O' : $\vec{r}\,'(0) = 0 \quad et \quad \vec{v}\,'(0) = 0$

  Equation du mouvement :

$$m\vec{a}'_P = \sum \vec{F}^{ext} - \left(2m\vec{\omega} \wedge \vec{v}'_P + m\vec{a}_{O'} + m\vec{\omega} \wedge \left(\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'P}\right) + m\dot{\vec{\omega}} \wedge \overrightarrow{O'P}\right)$$

$$m\vec{a}'_P = m\vec{g} - \left(2m\vec{\omega} \wedge \vec{v}'_P + m\vec{a}_{O'} + m\vec{\omega} \wedge \left(\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'P}\right) + 0\right)$$

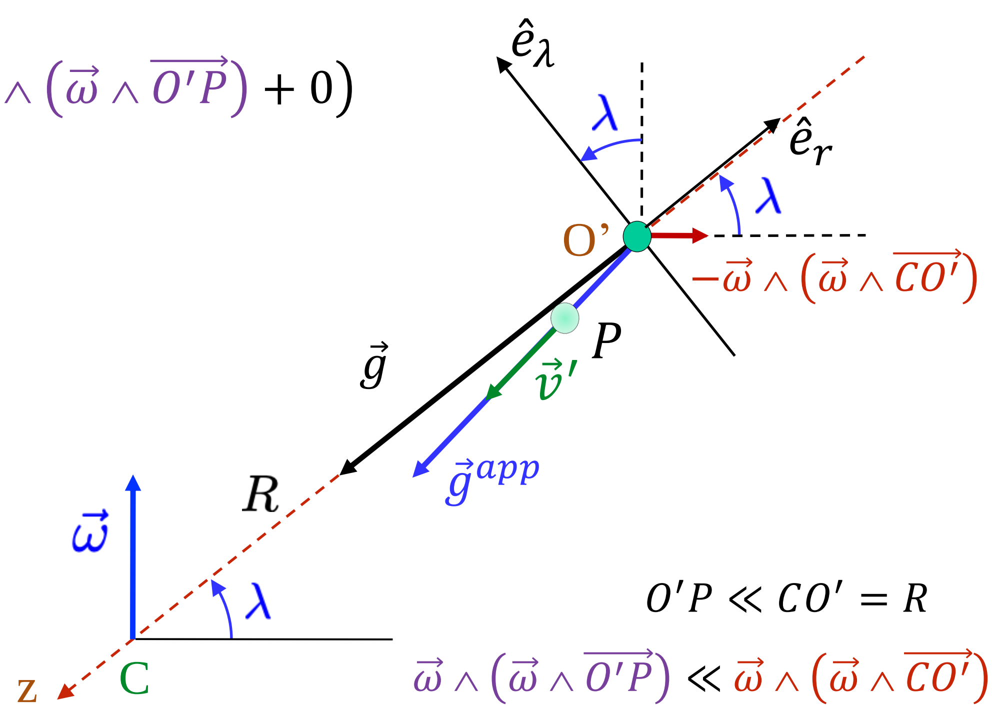
$$m\vec{a}'_P = m\vec{g} - \left(2m\vec{\omega} \wedge \vec{v}'_P + m\vec{\omega} \wedge \left(\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{CO'}\right) + m\vec{\omega} \wedge \left(\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'P}\right) + 0\right)$$

$$m\vec{a}'_P = m(\vec{g} - \vec{\omega} \wedge \left(\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{CO'}\right)) - 2m\vec{\omega} \wedge \vec{v}'_P$$

$$m\vec{a}'_P = m\vec{g}^{app} - 2m\vec{\omega} \wedge \vec{v}'_P$$

$$\vec{g}^{app} = \vec{g} - \vec{\omega} \wedge \left(\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{CO'}\right)$$

$\vec{g}^{app}$ est le champ de pesanteur apparent mesuré par l'observateur sur Terre



$$O'P \ll CO' = R$$

$$\vec{\omega} \wedge \left(\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'P}\right) \ll \vec{\omega} \wedge \left(\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{CO'}\right)$$

6.5 Champ de pesanteur terrestre

- On définit le « poids apparent » mg^{app}
- Ce poids apparent définit la verticale au point O' :
  - La verticale ne passe pas par le centre de la Terre (sauf si O' est aux pôles ou à l'équateur)

Champ de pesanteur apparent: $\vec{g}^{app} = \vec{g} - \vec{\omega} \wedge \left(\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{CO'}\right)$

$\vec{\omega} = \omega(\sin\lambda\, \hat{e}_r + \cos\lambda\, \hat{e}_\lambda)$

$\overrightarrow{CO'} = \vec{r} = R\hat{e}_r$

$\Rightarrow \quad \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{CO'} = \omega R \cos\lambda\, \hat{e}_\lambda \wedge \hat{e}_r$

$\hat{e}_\lambda \wedge \hat{e}_r = -\hat{e}_\phi$

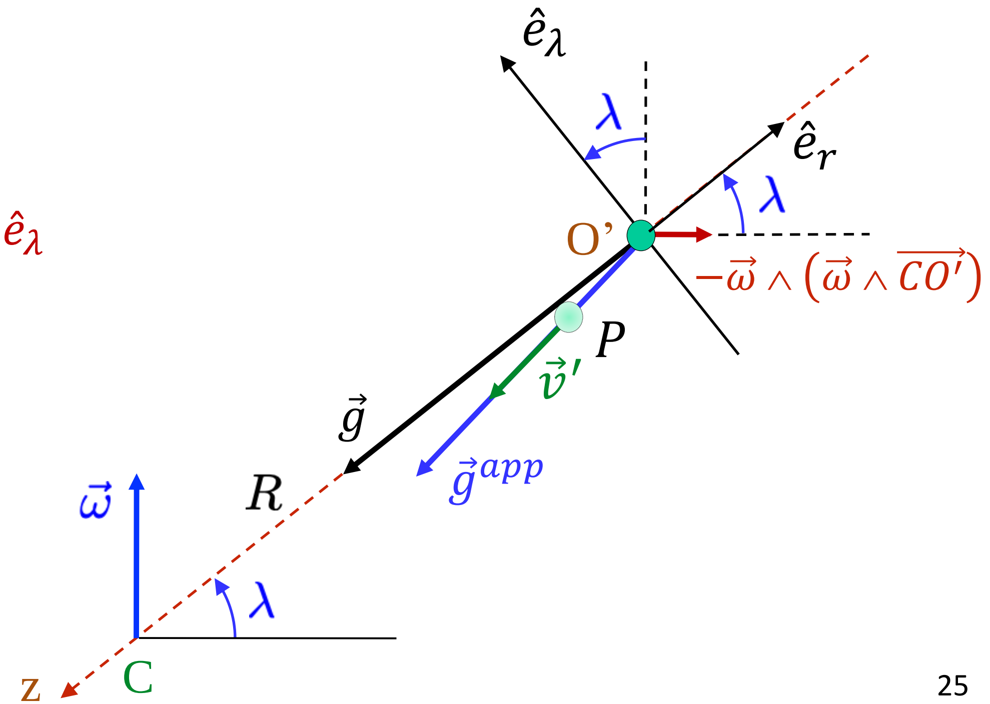
$\hat{e}_r \wedge \hat{e}_\phi = -\hat{e}_\lambda$

$$\vec{\omega} \wedge \left(\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{CO'}\right) = \omega^2 R(\sin\lambda\cos\lambda\, \hat{e}_r \wedge (\hat{e}_\lambda \wedge \hat{e}_r) + cos^2\lambda\, \hat{e}_\lambda \wedge (\hat{e}_\lambda \wedge \hat{e}_r)$$
$$= \omega^2 R(-cos^2\lambda \hat{e}_r + \sin\lambda\cos\lambda\, \hat{e}_\lambda)$$

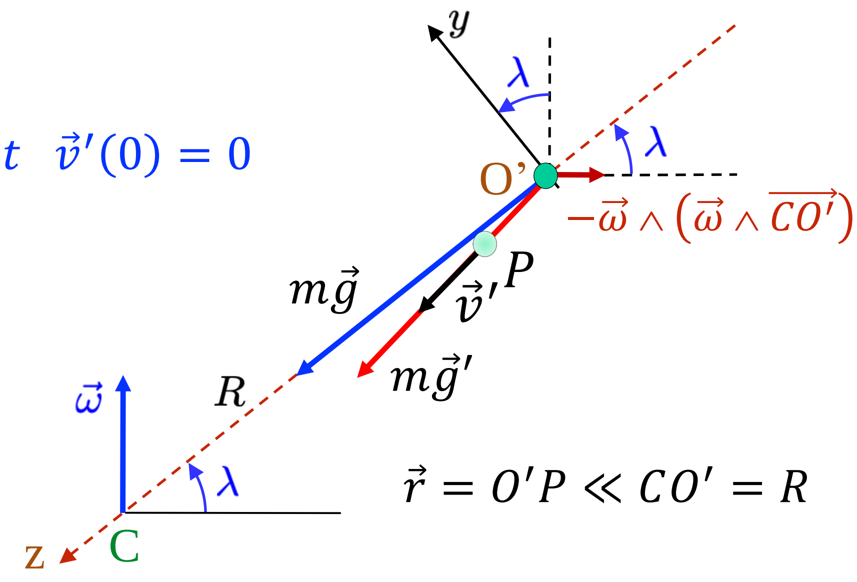
$$\vec{g}^{app} = -g\hat{e}_r + \omega^2 R cos^2\lambda \hat{e}_r - \omega^2 R \sin\lambda\cos\lambda\, \hat{e}_\lambda$$
$$= -g[(1 - \varepsilon\, cos^2\lambda)\hat{e}_r + \varepsilon \sin\lambda\cos\lambda\, \hat{e}_\lambda]$$

$$\varepsilon = \frac{\omega^2 R}{g} \approx 0.0035$$

g^{app} est minimale à l'équateur ($\lambda = 0$)
et maximale aux pôles ($\lambda = \pm\frac{\pi}{2}$)



6.5: Dynamique terrestre: chute libre



- On se place dans le référentiel terrestre (repère O'xyz)
- A $t = 0$ une masse m est lâchée au point O' : $\vec{r}'(0) = 0 \quad et \quad \vec{v}'(0) = 0$
- Equation du mouvement :

$$m\vec{a}'_P = m(\vec{g} - \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{CO'})) - 2m\vec{\omega} \wedge \vec{v}'_P$$

$$m\vec{a}'_P = m\vec{g}^{app} - 2m\vec{\omega} \wedge \vec{v}'_P$$

$$\vec{r} = O'P \ll CO' = R$$

$$\vec{g}^{app} = \vec{g} - \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{CO'}) = g\begin{pmatrix} 0 \\ -\varepsilon \cos\lambda \sin\lambda \\ 1 - \varepsilon \cos^2\lambda \end{pmatrix}$$

- En intégrant par rapport au temps: $\vec{v}' = \vec{g}'t - 2\vec{\omega} \wedge \vec{r}$

Vers l'est

$$\vec{\omega} \wedge \vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ \omega\cos\lambda \\ \omega\sin\lambda \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega\cos\lambda\, z + \omega\sin\lambda\, y \\ -\omega\sin\lambda\, x \\ -\omega\cos\lambda\, x \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = -2\omega(\cos\lambda\, z + \sin\lambda\, y) \\ \dot{y} = (-\varepsilon\cos\lambda\sin\lambda)gt \boxed{+ 2\omega\sin\lambda\, x} \\ \dot{z} = (1 - \varepsilon\cos^2\lambda)gt + \boxed{2\omega\cos\lambda\, x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \cong -\omega\cos\lambda(1-\epsilon)\frac{1}{3}gt^3 \cong -\frac{\omega\cos\lambda}{3}gt^3 \\ y \cong (-\varepsilon\cos\lambda\sin\lambda)\frac{1}{2}gt^2 \\ z \cong (1 - \varepsilon\cos^2\lambda)\frac{1}{2}gt^2 \cong \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

négligeable